

文章编号: 1000-8055(2005) 03-0434-06

齿轮耦合复杂转子系统弯扭耦合振动 分析的轴单元法

欧卫林, 王三民, 袁 茹
(西北工业大学 机电工程学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 针对存在非平行轴的多分支齿轮耦合复杂转子系统, 基于子结构分析理论, 将系统中的每一根轴视为单元, 将齿轮啮合力视为单元的激振力, 在局部坐标系中采用集总质量法建立该单元的振动方程; 在系统总体坐标系中, 将各单元的振动方程联立, 形成齿轮耦合复杂转子系统弯扭耦合振动方程, 通过数值求解, 获得系统固有频率和动态响应。采用所提出的轴单元法, 对某航空发动机启动系统进行了模态和强迫振动特性分析。

关键词: 航空、航天推进系统; 转子系统; 弯扭耦合振动; 集总质量法; 轴单元法

中图分类号: V231.9; TH113

文献标识码: A

Shaft Element Method for the Analysis of Lateral-Torsional Coupling Vibration of a Complex Gear-Rotor System

OU Wei-lin, WANG San-min, YUAN Ru

(School of Mechatronical Engineering,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: In the complex gear-rotor system with unparallel axes and multiple branches, based on sub-structure theory, each simple rotor was regarded as an axis element, and the gear meshing forces were considered as exciting forces of the element, then the vibration equations of all axes were established with lumped mass method in local coordinate system. In global coordinate system, all these vibration equations were synthesized to the lateral-torsional coupling vibration equation of the complex gear-rotor system. Through numerical calculation, the natural frequency and dynamic response of the system can be obtained. At last, the mode and lateral-torsional passive vibration of an aero-engine starting transmission system was analyzed with the axis element method proposed in this paper.

Key words: aerospace propulsion system; rotor system; lateral-torsional coupling vibration; lumped mass method; axis element method

现代工业的发展使齿轮传动系统朝着高转速、大功率的趋势发展, 同时也使自身的结构越来越复杂, 如直升机主旋翼传动系统、月球车驱动系

统和机械手减速系统等, 都属于齿轮耦合复杂转子系统。由于齿轮啮合的作用, 这类转子系统的振动特性与简单转子系统有着根本的区别, 突出的

收稿日期: 2004-06-30; 修订日期: 2004-10-20

基金项目: 航空科学基金资助项目(02C53019)

作者简介: 欧卫林(1977-), 男, 广西桂林人, 西北工业大学机电工程学院硕士生, 主要从事齿轮系统动力学研究。http://www.cnki.net

特征为系统的各轴间的弯扭耦合振动。对此类系统的振动特性分析,近十多年来,研究人员做了大量的工作,取得了许多成果^[1~6],但是目前所提出的方法往往只适用于某一种类型的齿轮耦合转子系统,如多根平行轴齿轮耦合转子系统,而对于存在非平行轴以及多分支的更为复杂的转子系统,尚缺乏行之有效的方法。为此,本文提出了一种适用于各种齿轮耦合复杂转子系统振动特性分析的轴单元法,为齿轮耦合复杂转子系统的振动特性研究提供有效的手段,为系统的设计、修改和性能评估提供一定的理论依据。

1 轴单元法

图 1 为一种典型的齿轮耦合复杂转子系统。该系统由 n 根轴组成,有 1 根输入轴(轴 1)和多根输出轴(多分支),轴与轴之间通过齿轮(直齿圆柱齿轮、斜齿圆柱齿轮和锥齿轮等)耦合在一起。为了建立该系统的振动方程,把系统分为 n 个单元,即每一根轴为一个单元,各轴单元之间通过齿轮相互耦合。根据集总质量法^[1],系统中第 m 个轴单元,可以等效为图 2 所示的集总质量模型,亦即将每个轴单元划分为许多个无质量的弹性轴段,而将转子上的分布惯性参数向轴段间的节点等效,用无弹性的惯性盘表示。

图中 l_j 和 d_j 分别为轴单元中第 j 个轴段的

式中:

$$M_j = \begin{bmatrix} m & & & & \\ & m & & & \\ & & J_y & & \\ & & & j_x & \\ & & & & J_z \end{bmatrix}_j$$

$$K_l^j = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ k_{yx} & k_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_j$$

$$K_b^j = \begin{bmatrix} A & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & B & 0 \\ -B & 0 & -C & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_a \end{bmatrix}$$

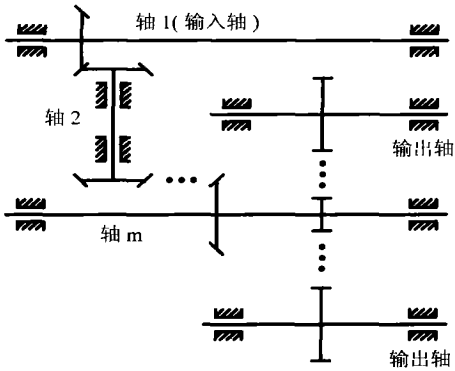


图 1 齿轮耦合复杂转子系统
Fig. 1 Complex gear rotor system

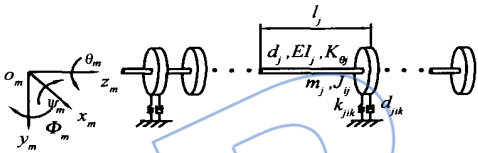


图 2 轴单元的集总质量模型
Fig. 2 Lumped mass model of shaft element

长度和直径; $E I_j, K_{\theta j}$ 分别为第 j 个轴段的弯曲刚度和扭转刚度; m_j 和 $J_{ij}(i=x, y, z)$ 分别为节点 j 处惯性盘的质量和转动惯量; d_{jik} 和 k_{jik} 分别为轴承的阻尼和刚度。在局部坐标系 $O_m x_m y_m z_m$ 中,第 j 个节点的自由振动方程可以表示为:

$$M_j \ddot{X}_j + C_j \dot{X}_j - K_a^{j+1} X_{j+1} - K_b^j X_{j-1} + \{K_l^j + K_c^{j+1} + K_d^j\} X_j = 0 \tag{1}$$

$$C_j = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ d_{yx} & d_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_z \omega & 0 \\ 0 & 0 & -J_z \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_j$$

$$K_a^{j+1} = \begin{bmatrix} A & 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & -B & 0 \\ B & 0 & -C & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_a \end{bmatrix}_{j+1}$$

$$K_c^{j+1} = \begin{bmatrix} A & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & B & 0 \\ B & 0 & 2C & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 2C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_a \end{bmatrix}$$

$$K_d^j = \begin{bmatrix} A & 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & -B & 0 \\ -B & 0 & 2C & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 2C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta j} \end{bmatrix}$$

$X_j = \{x_j, y_j, \varphi, \psi, \theta\}_m^T$ 为第 m 个轴单元在局部坐标系 $o_m x_m y_m z_m$ 下第 j 个节点的振动位移; 而:

$$A_j = \frac{12EI_j}{l_j^3} \quad B_j = \frac{6EI_j}{l_j^2} \quad C_j = \frac{2EI_j}{l_j}$$

当第 m 个轴单元上的第 j 个节点上有齿轮 (即齿轮 j) 与第 l 个轴单元上的第 i 个节点上的齿轮 (即齿轮 i) 啮合时, 式 (1) 就可以写成:

$$M_j \ddot{X}_j + \{C_j + C_{ji}\} \dot{X}_j - K_a^{j+1} X_{j+1} - K_b^j X_{j-1} + \{K^j + K_c^{j+1} + K_d^j + K_{ji}\} X_j + C_{ji} \dot{X}_i + K_{ji} X_i = 0 \quad (2)$$

式中: $X_i = \{x_i, y_i, \varphi, \psi, \theta\}_l^T$ 为第 l 个轴单元局部坐标系 $o_l x_l y_l z_l$ 下第 i 个节点的振动位移; 矩阵 C_{ji} , C_i , K_j , K_{ji} 是齿轮副 ji 啮合引起的耦合阻尼矩阵与耦合刚度矩阵, 可以通过分析齿轮间啮合力得到。

齿轮的啮合力对系统而言属于内力, 但是对轴单元而言可以视作该单元的激振力, 它与齿轮间的啮合刚度、啮合阻尼及相对位移等有关。在不

$$M_m \ddot{X}_m + C_m \dot{X}_m + C_{m,m-1} \dot{X}_{m-1} + C_{m,m+1} \dot{X}_{m+1} + K_m X_m + K_{m,m-1} X_{m-1} + K_{m,m+1} X_{m+1} = 0 \quad (3)$$

式中位移向量:

$$X_{m-1} = \{x_1, y_1, \varphi, \psi, \theta, \cdots, x_{n_{m-1}}, y_{n_{m-1}}, \varphi_{n_{m-1}}, \psi_{n_{m-1}}, \theta_{n_{m-1}}\}_{m-1}^T$$

$$X_m = \{x_1, y_1, \varphi, \psi, \theta, \cdots, x_{n_m}, y_{n_m}, \varphi_{n_m}, \psi_{n_m}, \theta_{n_m}\}_m^T$$

$$X_{m+1} = \{x_1, y_1, \varphi, \psi, \theta, \cdots, x_{n_{m+1}}, y_{n_{m+1}}, \varphi_{n_{m+1}}, \psi_{n_{m+1}}, \theta_{n_{m+1}}\}_{m+1}^T$$

分别为第 $m-1, m, m+1$ 个轴单元在各自的局部坐标系 $o_{m-1} x_{m-1} y_{m-1} z_{m-1}$, $o_m x_m y_m z_m$, $o_{m+1} x_{m+1} y_{m+1} z_{m+1}$ 中的位移向量; n_{m-1}, n_m, n_{m+1} 则分别为第 $m-1, m, m+1$ 个轴单元的节点数; 矩阵 M_m , C_m , K_m 分别为第 m 个轴单元的质量阵, 阻尼阵和刚度阵; $K_{m,m-1}$, $K_{m,m+1}$, $C_{m,m-1}$, $C_{m,m+1}$ 分别为第 m 个轴单元与第 $m-1, m+1$ 个轴单元因齿轮啮合而产生的对应于位移向量 X_{m-1} 与 X_{m+1} 的耦合刚度阵和耦合阻尼阵。

当第 m 个轴单元为输入轴时, 式 (3) 简化为:

$$M_m \ddot{X}_m + C_m \dot{X}_m + C_{m,m+1} \dot{X}_{m+1} + K_m X_m + K_{m,m+1} X_{m+1} = 0 \quad (4)$$

当第 m 个轴单元为输出轴时, 式 (3) 简化为:

$$M_m \ddot{X}_m + C_m \dot{X}_m + C_{m,m-1} \dot{X}_{m-1} + K_m X_m + K_{m,m-1} X_{m-1} = 0 \quad (5)$$

考虑齿轮的制造、安装、传动误差, 也不考虑啮合齿侧间隙、啮合摩擦力及啮合线位置的变化时, 齿轮副间的啮合力可近似表示为振动位移和振动速度的线性函数。这样, 齿轮副 ji 啮合激振力就表示为:

$$F_j = c_{ji} A_{jj} \dot{X}_j + k_{ji} A_{jj} X_j + c_{ji} A_{ji} \dot{X}_i + k_{ji} A_{ji} X_i$$

$F_i = c_{ji} A_{ij} \dot{X}_i + k_{ji} A_{ij} X_i + c_{ji} A_{ii} \dot{X}_i + k_{ji} A_{ii} X_i$
 k_{ji} 和 c_{ji} 分别表示齿轮副 ji 的啮合刚度和啮合阻尼; A_{jj} 和 A_{ji} 分别为激振力 F_j 对应于 X_j, X_i 的系数矩阵; A_{ij} 和 A_{ii} 分别为激振力 F_i 对应于 X_j, X_i 的系数矩阵。于是就有: $C_j = c_{ji} A_{jj}$, $K_{jj} = k_{ji} A_{jj}$, $C_i = c_{ji} A_{ji}$, $K_{ji} = k_{ji} A_{ji}$ 。式中: k_{ji} , c_{ji} , A_{jj} , A_{ji} , A_{ij} , A_{ii} 的具体值取决于齿轮副的类型和参数。

当齿轮 j 同时与多根轴上的齿轮啮合时, 同样可以得到类似于式 (2) 的节点振动方程。这样第 m 个轴单元中每一个节点都可以根据式 (1) 和 (2) 中写出该节点的自由振动方程, 把全部节点的方程联立起来就可以得到第 m 个轴单元的方程。对于单分支情况, 第 m 个轴单元将与第 $m-1$ 和 $m+1$ 个轴单元通过齿轮耦合, 其自由振动方程简记为:

为了研究多分支系统, 现假设系统具有 2 个分支, 第 m 个轴单元为系统的分岔点, 第 1 个分支从系统输入轴 1 开始到该分支的输出轴 s , 第 2 个分支从与轴 m 耦合的轴 $s+1$ 到该分支的输出轴 n 。为方便起见, 对系统轴单元按第 1 分支、第 2 分支的顺序进行编号。这样式 (3) 就可以扩展成为:

$$M_m \ddot{X}_m + C_m \dot{X}_m + C_{m,m-1} \dot{X}_{m-1} + C_{m,m+1} \dot{X}_{m+1} + C_{m,s+1} \dot{X}_{s+1} + K_m X_m + K_{m,m-1} X_{m-1} + K_{m,m+1} X_{m+1} + K_{m,s+1} X_{s+1} = 0 \quad (6)$$

系统中的每一个轴单元就都可以根据式 (3) ~ (6) 得到该轴单元的自由振动方程, 共有 n 个。这 n 个方程都是在各自的局部坐标中建立起来的, 为了建立系统的整体振动方程, 必须建立一个系统的总体坐标系 $oxyz$ 。为了避免繁琐的坐标转

换, 总体坐标系 xyz 设为广义坐标系, 在该坐标系下各轴单元的位移向量仍然取其在本身的局部坐标系下的位移向量, 即系统位移向量:

$$\boldsymbol{X} = \{ \boldsymbol{X}_1^T, \cdots, \boldsymbol{X}_s^T, \boldsymbol{X}_{s+1}^T, \cdots, \boldsymbol{X}_n^T \}^T$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} & (\text{自由振动}) \\ \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} & (\text{强迫振动}) \end{cases} \quad (7)$$

式中:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boldsymbol{M}_s & & \\ & & & \boldsymbol{M}_{s+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \boldsymbol{M}_n \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & & & \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & C_{m,m-1} & C_{m,m} & C_{m,m+1} & C_{m,s+1} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & C_{s,s-1} & C_{s,s} \\ & C_{s+1,m} & & C_{s+1,s+1} & C_{s+1,s+2} \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & C_{n-1,n-2} & C_{n-1,n-1} & C_{n-1,n} \\ & & & & C_{n,n-1} & C_{n,n} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & & & \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & K_{m,m-1} & K_{m,m} & K_{m,m+1} & K_{m,s+1} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & K_{s,s-1} & K_{s,s} \\ & K_{s+1,m} & & K_{s+1,s+1} & K_{s+1,s+2} \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & K_{n-1,n-2} & K_{n-1,n-1} & K_{n-1,n} \\ & & & & K_{n,n-1} & K_{n,n} \end{bmatrix}$$

分别为系统总质量矩阵, 总阻尼矩阵与总刚度矩阵。 $\boldsymbol{F} = \{ \boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_s, \boldsymbol{F}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{F}_n \}^T$ 为系统的外加激励力向量。

当系统的分支数大于2时, 同样可以得到与式(7)一样的振动方程, 而系统的总质量阵, 总阻尼阵以及总刚度阵的形式也与分支数为2时相类似。

采用数值方法求解式(7), 可获得无激励时系统的模态和有激励时的响应。

这样, 在总体坐标系 xyz 中, 就将可以直接这 n 个振动方程联立起来形成系统的振动方程, 简记为:

2 算 例

图3为某航空发动机启动系统的简化分析模型。这是一个齿轮耦合3转子系统, 由高速轴(简称H轴)、中间轴(简称M轴)和低速轴(简称L轴)组成。启动系统的传递功率分别为H轴100 kW, M轴92 kW, L轴85 kW。H轴的工作转速为31 440 r/min。3根轴的直径依次为: H轴0.025 m, M轴0.020 m, L轴0.040 m。通过对每根轴上

零件和结构的等效处理, 得出 H 轴、M 轴和 L 轴的集中质量节点数分别为 13, 13 和 10, 系统总节点数为 36。3 个轴单元在系统振动方程中的排列次序依次为 H 轴(1~13), M 轴(14~26), L 轴(27~36)。图中标示了转子系统中重要节点的节点号, 包括 5 个惯性盘节点、4 个齿轮节点和 6 个

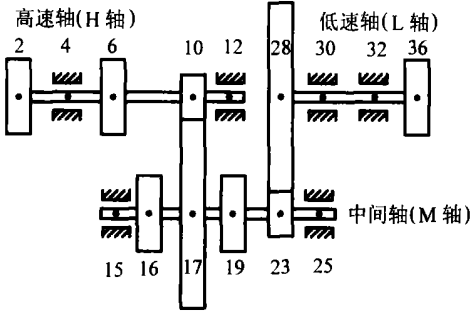


图3 某航空发动机启动系统简化模型

Fig. 3 Simplified model of the enable system of a certain aero-engine

轴承节点。其中5个惯性盘的质量依次为: 4.897 6 kg, 2.938 6 kg, 0.887 8 kg, 2.034 6 kg, 11.264 1 kg, 极转动惯量依次为: 0.019 5 kgm², 0.011 7 kgm², 0.001 1 kgm², 0.004 2 kgm², 0.085 7 kgm², 直径转动惯量均为极转动惯量的一半; 各轴承为滚动轴承, 支承刚度与阻尼分别为 0.8×10^7 N/m 和 0.6×10^4 Ns/m。4 个斜齿轮的齿数分别为 18, 79, 15, 82; 两对齿轮的啮合刚度分别为 2.42×10^8 N/m 和 5.48×10^8 Ns/m, 阻尼比取常值 0.05。

2.1 模态分析

由于本系统是由 3 根轴耦合而成, 在静态工作点上, 各轴的转速互不相同, 分析时用 H 轴转速作为系统的基准转速。现对系统工作转速为 31 440 r/min 时的模态分析结果进行讨论, 这时所对应的 M 轴转速为 7 163.5 r/min, L 轴转速为 1 310.4 r/min。为简单起见, 这里仅讨论在 0.5~1.5 倍工作转速范围内的模态。在未耦合之前, 系统中各轴在这一范围内的模态见表 1, 其中有一个模态的对数衰减率为负, 即存在不稳定模态。而耦合时, 在这一范围内, 系统有 7 个模态, 其对数衰减率均为正, 即系统稳定, 振型如图 4 所示。图中的转速是以 H 轴转速为基准得到的折合转速, 衰减率即为对数衰减率。对照耦合前各轴的模态, 可以看出, 模态 2 与模态 5 为单轴振型, 分别对应于 L 轴的模态 1 与模态 3; 模态 1, 4, 6 为二轴耦合振

型, 其中模态 1 由 M 轴的模态 1 演变而来,

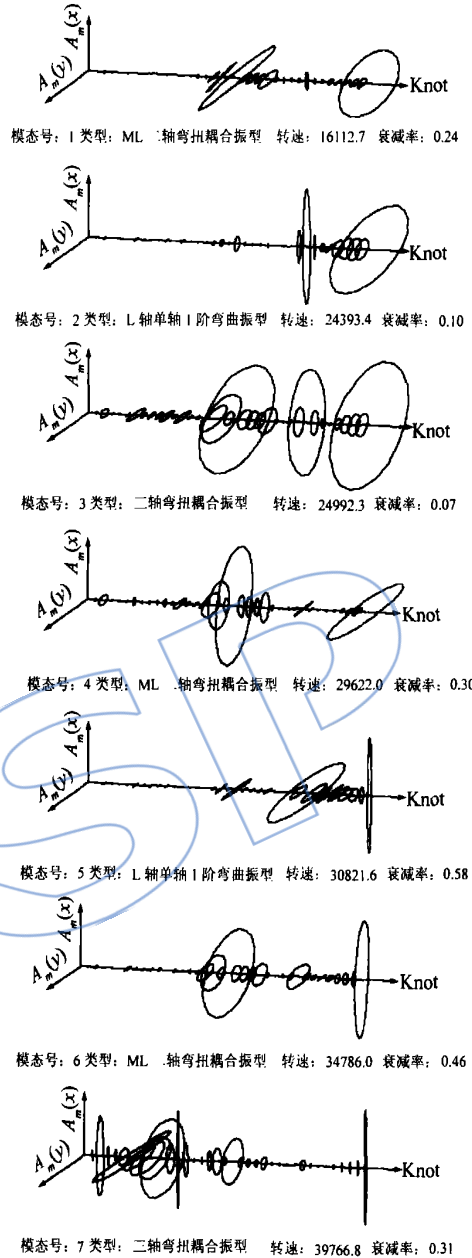


图4 耦合系统的模态

Fig. 4 Modes of coupling system

模态 4 由 L 轴的模态 2 演变而来, 模态 6 为耦合系统派生出来的新模态; 模态 3 和模态 7 为三轴耦合模态, 均为耦合系统派生出来的新模态; 耦合系统派生出来的新模态是耦合系统特有的, 只依赖对简单的单轴转子分析是无法得到的。

2.2 强迫振动响应分析

为了分析系统的强迫振动响应特性, 在不考虑输入输出扭矩波动的情况下, 分别在高速轴节点 6、中间轴节点 19、低速轴节点 28 上施加不平衡量 2.0×10^{-4} kgm。图 5 为 3 种情况下的系统

表1 耦合前系统各轴的模态
Table 1 Mode of shafts in system without coupling

轴	模态号	振动类型	转速/(r/ min)	对数衰减率
H 轴	1	1 阶弯扭	25 777.3	-1.9×10^{-13}
	2	2 阶弯曲	40 001.8	0.31
M 轴	1	1 阶弯曲	16 178.4	0.32
	2	2 阶弯曲	36 828.6	0.62
	3	2 阶弯扭	37 466.8	3.9×10^{-14}
L 轴	1	1 阶弯曲	24 250.1	0.11
	2	1 阶扭转	29 730.5	2.1×10^{-13}
	3	2 阶弯曲	30 819.2	0.66

注: 表中的转速是以H 轴转速为基准得到的折合转速

分布较密,因此应当小心选择工作转速,以避开系统的共振区。

(3) 齿轮耦合复杂转子系统中高速轴的不平衡除了激起所在轴的高幅振动外,还会激起其它轴的振动,从而影响系统的安全性和可靠性,因此要注意提高高速轴的动平衡精度,以提高系统的动态品质。

参考文献:

[1] 虞烈,刘恒. 轴承转子系统动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.

[2] 张建云. 齿轮传动对多平行转子- 轴承系统动力学特性影响的研究[D]. 西安: 西安交通大学, 1999.

[3] 朱勤, 谢友柏, 虞烈. 多根平行轴齿轮转子系统的弯曲耦合振动分析[J]. 振动与冲击, 1996, 15(4): 43~47.

Zhu Qin, Xie Youbai, Yu Lie. Analysis of Lateral Coupled Vibration of Multi-Stage Gear-Rotor System[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 1996, 15(4): 43~47.

[4] 张建云, 丘大谋. 齿轮刚度及制造误差对多平行轴转子系统动力学特性的影响[J]. 机械科学与技术, 1996, 15(5): 749~754.

Zhang Jianyun, Qiu Damou. Effects of Gear Stiffness and Manufacturing Errors on the Dynamical Characteristics of Parallel Multi-Stage Gear-Bearing-Rotor System [J]. *Mechanical Science and Technology*, 1996, 15(5): 749~754.

[5] 夏伯乾, 虞烈, 谢友柏. 齿轮- 转子- 轴承系统弯扭耦合振动模型研究[J]. 西安交通大学学报, 1997, 31(12): 93~99.

Xia Boqian, Yu Lie, Xie Youbai. Study on Lateral-Torsional Coupling Vibration Model of Gear-Rotor-Bearing System [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 1997, 31(12): 93~99.

[6] Takuzo T, Shirou A. Coupled Lateral-Torsional Vibration of Rotor System Train by Gears[J]. *Bulletin of JSME*, 1984, 27(224): 271~277.

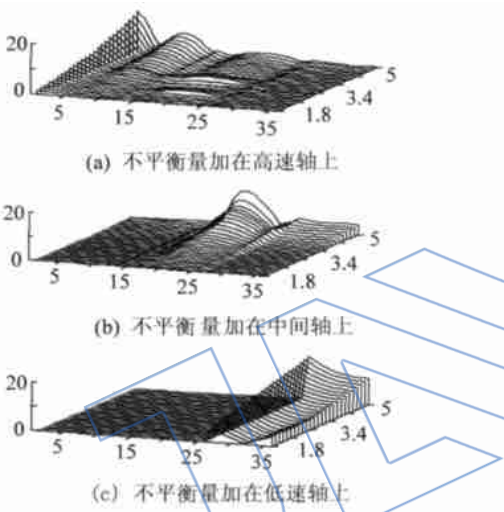


图5 系统幅频响应图

Fig. 5 Amplitude and frequency response of system
幅频响应图。从图中可以看出, 高速轴的不平衡不仅会激起所在轴的强迫振动响应, 而且还会激起其他两轴的响应; 中间轴和低速轴的不平衡都未激起高速轴的强迫振动。由此可见, 高速的不平衡特性会对整个系统的动态性能产生影响, 而且随着系统转速的提高, 不平衡响应逐渐增大。

3 结 论

(1) 对于各种形式的齿轮耦合复杂转子系统, 将每一根轴视为单元, 把齿轮啮合力视为单元激振力, 建立轴单元振动方程, 然后联立起来可以得到系统的振动方程。

(2) 齿轮耦合系统复杂转了除了有单轴模态和轴间耦合模态外, 还派生出新的模态, 使得振型